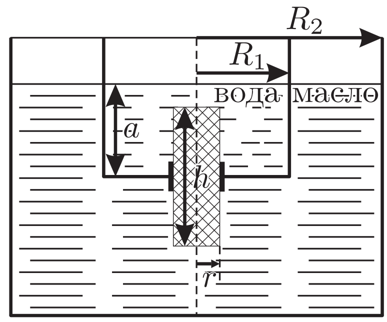
Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по физике
2008/2009 учебный год
11 класс

Задача 1



Один цилиндрический сосуд радиусом R_1 удерживают внутри другого, радиусом R_2, так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен деревянный цилиндр радиусом r и высотой $h = 21$ см; он может перемещаться относительно втулки без трения только по вертикали. В малый сосуд налита вода до уровня $a = 30$ см, а в большой – масло, и при этом цилиндр покоится. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность масла $\rho_м = 790$ кг/м^3, плотность цилиндра $\rho = 600$ кг/м^3. Какая часть объема цилиндра находится в воде, а какая – в масле? При каком соотношении между $\rho_в$, $\rho_м$, r, R_1 и R_2 равновесие цилиндра будет устойчивым, то есть при его смещении вверх или вниз будут возникать силы, стремящиеся вернуть его обратно, к положению равновесия?

Решение

Обозначим через d высоту части цилиндра, выступающей в воду. Тогда в равновесии сила давления масла на нижнее основание цилиндра уравновешивает вес цилиндра и силу давления воды на его верхнее основание: $\rho_м g(a+h-d)S = \rho hSg + \rho_в g(a-d)S$ (здесь $S = \pi r^2$ – площадь сечения цилиндра). Отсюда $d = a - \frac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho_м}h$, и в воде находится часть объема цилиндра, равная $n = \frac{Sd}{Sh} = \frac{d}{h} = \frac{a}{h} - \frac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho_м} = \frac{11}{21}$, а в масле – часть объема, равная $1 - n = \frac{10}{21}$.

Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы при небольшом смещении цилиндра по вертикали на расстояние x возникала сила, направленная противоположно этому смещению и стремящаяся вернуть его обратно, к положению равновесия. При $x > 0$ (смещение вверх) сила должна быть направлена вниз, то есть давление масла на нижнее основание цилиндра должно стать меньше веса цилиндра и силы давления воды на его верхнее основание. Смещаясь вверх на x, цилиндр вытесняет воду в малом сосуде, и ее уровень повышается на $y = \frac{\pi r^2 x}{\pi R_1^2} = \frac{r^2}{R_1^2} x$. В большом сосуде уровень масла при этом понижается на $z = \frac{\pi r^2 x}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{r^2}{(R_2^2 - R_1^2)} x$.

Итак, условие устойчивости равновесия цилиндра можно записать в виде:

$$\rho_{\text{м}}[(a - z) + h - (d + x)] < \rho h + \rho_{\text{в}}[(a + y) - (d + x)];$$

вычитая отсюда равенство, выражающее условие равновесия:

$$\rho_{\text{м}}(a + h - d) = \rho h + \rho_{\text{в}}(a - d),$$

имеем: $-\rho_{\text{м}}(z + x) < \rho_{\text{в}}(y - x)$, или $\rho_{\text{м}}(z + x) > \rho_{\text{в}}(x - y)$. Подставляя в это соотношение найденные величины y и z, получаем условие устойчивости равновесия цилиндра в виде:

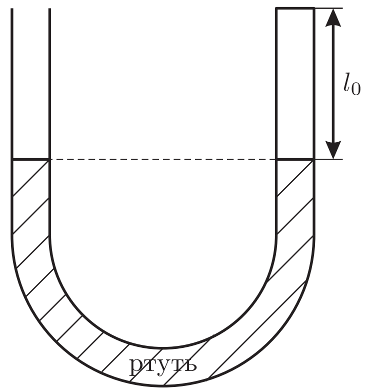
$$\rho_{\text{м}}\left(\frac{r^2}{(R_2^2 - R_1^2)} + 1\right)x > \rho_{\text{в}}\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right)x,$$

или

$$\rho_{\text{м}} \frac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_{\text{в}} \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}.$$

Ответ: В воде находится часть объема цилиндра, равная $n = \frac{a}{h} - \frac{\rho_{\text{м}} - \rho}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}} = \frac{11}{21}$, а в масле – часть объема, равная $1 - n = \frac{10}{21}$. Равновесие будет устойчивым, если $\rho_{\text{м}} \frac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_{\text{в}} \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}$.

Задача 2



Один из концов U-образной трубки постоянного сечения, заполненной ртутью, наглухо закрыли (см. рисунок). Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления p от температуры T. Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближенно является линейной: $p \approx p_0\left[1+\alpha\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\right]$, где $p_0 = 760$ мм рт. ст. – атмосферное давление, T_0 – абсолютная температура окружающей среды, α = 0,5. Найдите высоту l_0 столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса. Плотность ртути ρ = 13,6 г/см^3.

Решение

Запишем уравнение состояния воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса: $p_0 l_0 S = \nu R T_0$; здесь S – площадь сечения трубки. Пусть при нагревании до температуры T уровень ртути в открытом конце трубки поднялся на x, а в закрытом – опустился на такую же величину x. Тогда давление воздуха в закрытом конце трубки равно $p = p_0 + 2\rho g x$, объем равен $S(l_0 + x)$, и уравнение состояния воздуха в закрытом конце трубки будет иметь вид: $\nu RT = (p_0 + 2\rho g x)S(l_0 + x) = p_0 S l_0 + Sx(p_0 + 2\rho g l_0) + 2\rho g S x^2$. При малых x, в начале процесса нагревания, квадратичным слагаемым можно пренебречь, и тогда, вычитая из данного уравнения состояния то уравнение, которое было справедливо до начала процесса, получаем: $\nu R(T - T_0) \approx Sx(p_0 + 2\rho g l_0)$, откуда $x = \frac{\nu R(T-T_0)}{S(p_0+2\rho g l_0)} = \frac{p_0 S l_0}{S(p_0+2\rho g l_0)} \cdot \frac{T-T_0}{T_0}$. Следовательно, $p = p_0 + \frac{p_0 \cdot 2\rho g l_0}{p_0+2\rho g l_0} \cdot \frac{T-T_0}{T_0} = p_0\left(1+\frac{2\rho g l_0}{p_0+2\rho g l_0} \cdot \frac{T-T_0}{T_0}\right)$, откуда $\alpha = \frac{2\rho g l_0}{p_0+2\rho g l_0}$. Таким образом, $l_0 = \frac{p_0}{2\rho g(\alpha^{-1}-1)} = \frac{\rho g h_0}{2\rho g(\alpha^{-1}-1)} = \frac{h_0}{2(\alpha^{-1}-1)} = 380$ мм. Здесь $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$ мм – высота столба ртути, соответствующая данному в условии задачи значению атмосферного давления.

Ответ: $l_0 = \dfrac{h_0}{2(\alpha^{-1} - 1)} = 380$ мм, где $h_0 = \dfrac{p_0}{\rho g} = 760$ мм.

Задача 3

Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда +σ, а остальные грани – с плотностью заряда –σ. Найти напряженность $\vec{E}$ электрического поля в центре кубика.

Решение

Для решения задачи надо, очевидно, найти напряженность поля $\vec{E}_1$ на высоте $a/2$ над центром квадратной пластинки со стороной a, если пластинка равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ. Из соображений симметрии ясно, что вектор $\vec{E}_1$ направлен перпендикулярно этой пластинке.

Рассмотрим вначале вклад малого «пятнышка» площадью ΔS на плоскости, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, в нормальную составляющую напряженности электрического поля $\Delta E_{1\perp}$ в точке, находящейся над плоскостью на расстоянии r от «пятнышка» (см. рисунок 1). По закону Кулона

$$\Delta E_{1\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma\Delta S}{r^2}\cdot\cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S\cdot\cos\alpha}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta S_\perp}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\Delta\Omega,$$

где α – угол между направлением вектора $\Delta\vec{E}_1$ и нормалью к плоскости, а $\Delta\Omega = \frac{\Delta S_\perp}{r^2}$ – элемент телесного угла, под которым видно наше заряженное «пятнышко» из точки наблюдения. Из полученного результата следует, что искомая напряженность поля по модулю равна $E_1 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\Omega_1$, где Ω_1 – телесный угол, под которым видна одна грань кубика из его центра. Поскольку равноправных граней у кубика 6, а полный телесный угол равен 4π, то на одну грань приходится телесный угол $\Omega_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, и $E_1 = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$. Заметим, кстати, что это 1/3 от напряженности поля над «бесконечной» равномерно заряженной плоскостью.

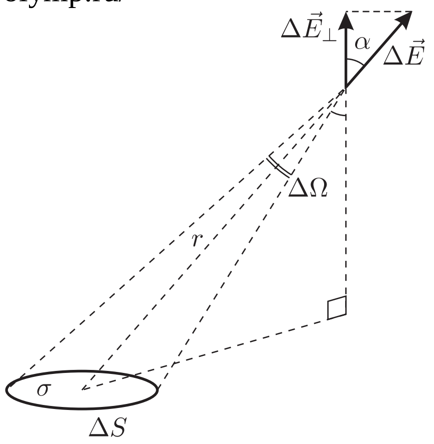


рисунок 1

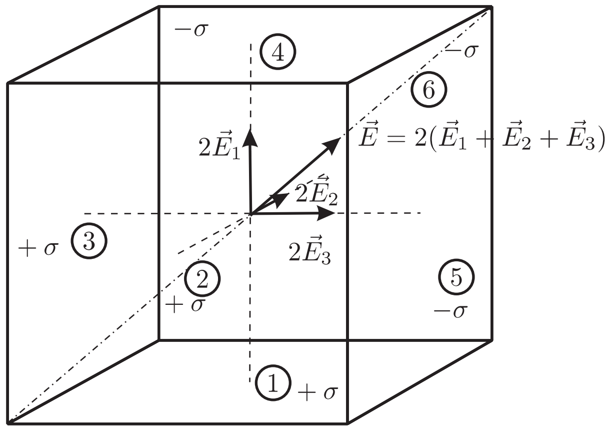
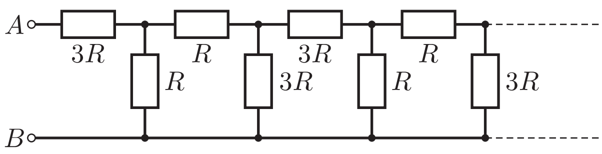


рисунок 2

Теперь можно дать ответ на вопрос, поставленный в задаче. В центре кубика напряженность поля $\vec{E}$ складывается (см. рисунок 2) из трех взаимно перпендикулярных векторов, одинаковых по модулю: $\vec{E} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2 + 2\vec{E}_3$. Каждый из этих векторов является напряженностью поля от двух параллельных граней кубика с противоположными по знаку зарядами. Модуль вектора $\vec{E}$ по теореме Пифагора равен $\left|\vec{E}\right| = 2\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2} = 2\sqrt{3}E_1 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$, а направлен этот вектор вдоль пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» к отрицательно заряженному.

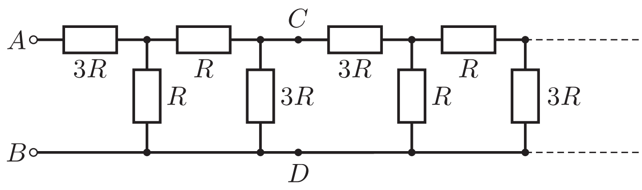
Ответ: $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» к отрицательно заряженному.

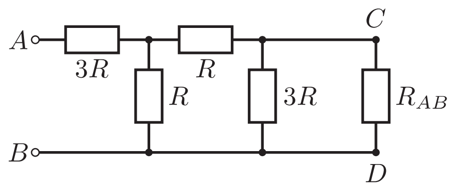
Задача 4



Бесконечная цепочка из одинаковых звеньев состоит из резисторов сопротивлениями 3*R* и *R*, соединенных как показано на рисунке. Найти ее сопротивление R_{AB} между входными контактами *A* и *B*.

Решение





Если убрать первое звено (до точек *C* и *D*, см. левый рисунок), то в силу бесконечности цепочки ее сопротивление не изменится: $R_{CD} = R_{AB}$. Поэтому для вычисления R_{AB} надо вначале подсчитать сопротивление первого звена с подсоединенным параллельно его последнему резистору 3*R* сопротивлением R_{AB} (см. правый рисунок). Тогда к первому слева резистору *R* будет параллельно присоединено сопротивление $R + \dfrac{3RR_{AB}}{3R + R_{AB}} = \dfrac{3R^2 + 4RR_{AB}}{3R + R_{AB}}$, и их общее сопротивление будет равно $\dfrac{R(3R^2 + 4RR_{AB})}{3R^2 + 4RR_{AB} + 3R^2 + RR_{AB}} = \dfrac{3R^2 + 4RR_{AB}}{6R + 5R_{AB}}$. К этому сопротивлению последовательно подключен самый первый резистор 3*R*, и искомое уравнение для нахождения R_{AB} имеет вид:

$$R_{AB} = 3R + \frac{3R^2 + 4RR_{AB}}{6R + 5R_{AB}},$$

или

$$5R_{AB}^2 - 13RR_{AB} - 21R^2 = 0.$$

Отсюда с учетом того, что $R_{AB} > 0$, получаем:

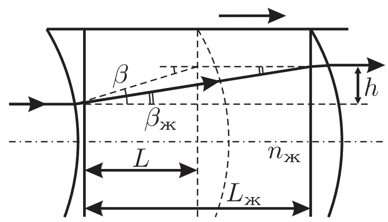
$$R_{AB} = \frac{13R + \sqrt{169R^2 + 420R^2}}{10} = (1{,}3 + \sqrt{5{,}89})R \approx 3{,}73R.$$

Ответ: $R_{AB} = (1{,}3 + \sqrt{5{,}89}\,)R \approx 3{,}73R$.

Задача 5

Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена плоской стороной к рассеивающей. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнено жидкостью, то для получения параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в 1,5 раза. Найти показатель преломления жидкости.

Решение



Рассмотрим ход одного из «параксиальных» (то есть приосевых) лучей в данной оптической системе (см. рисунок). Пока между линзами в трубке был воздух, при преломлении этого луча на плоской поверхности плосковогнутой линзы выполнялось следующее соотношение, справедливое для малых углов падения α и преломления β: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{n_{ст}}$, где $n_{ст}$ – показатель преломления стекла этой линзы. После заполнения трубки жидкостью угол преломления изменился: $\dfrac{\alpha}{\beta_ж} = \dfrac{n_ж}{n_{ст}}$, так что $n_ж = \dfrac{\beta}{\beta_ж}$. При преломлении на плоской поверхности плосковыпуклой линзы угол падения луча после заполнения трубки жидкостью также уменьшился от β до $\beta_ж$. Для того, чтобы данный луч после преломления в этой линзе остался параллельным главной оптической оси системы, он должен внутри линзы идти под тем же углом к выпуклой поверхности линзы, что и до заполнения трубки жидкостью. Это возможно, только если луч попал на линзу на том же расстоянии от оси, что и до заполнения трубки жидкостью. Поскольку показатель преломления жидкости $n_ж > 1$, $\beta_ж < \beta$, для выполнения указанного условия плосковыпуклую линзу надо отодвигать от плосковогнутой с расстояния L до $L_ж$, причем по условию $\dfrac{L_ж}{L} = 1{,}5$. Пусть h – то расстояние, на которое луч смещается между линзами от оси системы (см. рисунок). Тогда для малых углов $\beta = \frac{h}{L}$, а $\beta_{ж} = \frac{h}{L_{ж}}$, откуда $n_{ж} = \frac{\beta}{\beta_{ж}} = \frac{L_{ж}}{L} = 1{,}5$.

Ответ: $n_{ж} = 1{,}5$.